Uke 43

Første ordens logikk

- Konnektivene i utsagnslogikk
- $\forall$-kvantor over individer : all-kvantor - for alle - skriver $\forall x\ F(x)$
- $\exists$-kvantor over individer : eksistens-kvantor - det fins - skriver $\exists x\ F(x)$
- Signatur : liste over predikatsymboler, funksjonssymboler
- Variable for individer - frie og bundne variable i et utsagn

Dette språket er dere kjent med. Vi er omhyggelig med å angi signaturen for det første ordens språk vi arbeider med. Legg merke til de bundne variablene i kvantor utsagn ($\forall x\ F(x)$ og $\exists x\ F(x)$) . Vi kan se på $\forall$ som noe av type $(U \to BOOL) \to BOOL$. Det samme med $\exists$.

Kvantorregler i sekventkalkyle

Vi har alt sett regelen for $\forall$-antesedent. Det er tilsvarende regel for $\exists$-suksedent.

$$\frac{\Gamma, \forall x\ F(x), F(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ F(x) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ F(x), F(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ F(x), \Delta}$$

Her vil ikke regelene gjøre oss ferdige med analysen av kvantorutsagnene – de er kritiske utsagn, og vi må som regel instansiere med andre termer. Eksempel på dette er i simuleringen av beregninger med bruk av første ordens logikk slik vi så forrige uke.

Så til regelen for $\forall$-suksedent og $\exists$-antesedent. La oss tenke oss at vi skal falsifisere $\Gamma \vdash \Delta, \forall x\ F(x)$. Da må vi finne et individ som F er usant for. Vi vet ikke hvilket individ det skulle være, men vi kan lage et nytt navn for det og så regne videre med det nye navnet. (Dette er på samme måte som vi løser likninger – vi later som vi har et navn på løsningen og så regner videre og finner hvilken verdi den ukjente har.) Her er reglene

$$\frac{\Gamma \vdash F(a), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ F(x), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, F(a) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ F(x) \vdash \Delta}$$

VI FORUTSETTER AT DET NYE NAVNET ER FERSKT – DET ER IKKE BRUKT I KONKLUSJONEN. SIDEN EN FALSIFIKASJON HAR IKKE TOMT UNIVERS HAR VI ALLTID MINST ET NAVN.

I $\forall$-SUKSEDENT OG $\exists$-ANTESEDENT BLIR KVANTORUTSAGNENE FERDIG ANALYSERT VED BRUK AV REGELEN.

Oppsummering

- Aksiomer som før
- Regler for konnektiver som før
- $\forall$-antesedent og $\exists$-suksedent : kritiske utsagn som ikke er ferdig analysert
- $\forall$-suksedent og $\exists$-antesedent : usagn som blir ferdig analysert med fersk variabel
- Ferske variable og kritiske utsagn

Tenk gjennom reglene og se at de er fornuftige !

Eksempel

$$
\begin{array}{c}
\bullet \\
\underline{\forall y\, R(a,y),\, R(a,b) \vdash \exists x\, R(x,b),\, R(a,b)} \\
\underline{\forall y\, R(a,y),\, R(a,b) \vdash \exists x\, R(x,b)} \\
\underline{\forall y\, R(a,y) \vdash \exists x\, R(x,b)} \\
\underline{\forall y\, R(a,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)} \\
\underline{\exists x\, \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)} \\
\vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall y\, \exists x\, R(x,y)
\end{array}
$$

Utsagnet $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall y\, \exists x\, R(x,y)$ er gyldig. Hva med utsagnet $\forall y\, \exists x\, R(x,y) \rightarrow \exists x\, \forall y\, R(x,y)$? Det er ikke gyldig. Følgende gir en falsifikasjon :

- Universet er de naturlige tall 0 1 2 3 4 ....
- $R(x,y)$ tolkes som " x er større enn y "
- $\forall y\, \exists x\, R(x,y)$ sier at " for hvert tall y er det en x som er større enn y " - dvs sant
- $\exists x\, \forall y\, R(x,y)$ sier at " det fins et tall x som er større enn alt " - dvs usant

En utledning gir en uendelig prosess og vil aldri stoppe opp i et bevis.

$$
\begin{array}{c}
\underline{\ldots\ldots} \\
\underline{\forall y\, \exists x\, R(x,y)\, ,\, R(d,b)\, ,\, R(a,b)\ \vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y)\ ,\ R(a,c)} \\
\underline{\forall y\, \exists x\, R(x,y)\, ,\, \exists x\, R(b,y)\, ,\, R(a,b)\ \vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y)\ ,\ R(a,c)} \\
\underline{\forall y\, \exists x\, R(x,y)\, ,\, R(a,b)\ \vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y)\ ,\ R(a,c)} \\
\underline{\forall y\, \exists x\, R(x,y)\, ,\, R(a,b)\ \vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y)\ ,\ \forall y\, R(a,y)} \\
\underline{\forall y\, \exists x\, R(x,y)\, ,\, \exists x\, R(a,y)\ \vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y)\ ,\ \forall y\, R(a,y)} \\
\underline{\forall y\, \exists x\, R(x,y)\, ,\, \exists x\, R(a,y)\ \vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y)} \\
\forall y\, \exists x\, R(x,y) \vdash \exists x\, \forall y\, R(x,y)
\end{array}
$$

Det hele blir fort veldig uoversiktlig – men en kan bruke en slik uendelig grein til å gi en falsifikasjon. (Universet er termene i utledningen, de atomære utsagnene i antesedenten gjøres sanne, mens de i suksedenten gjøres usanne.)

Noen punkter

- Det spiller litt rolle – men ikke så veldig mye hvilket utsagn i sekventen som blir analysert først
- Mer vesentlig er valg av termer som blir instansiert (satt inn) ved $\forall$-antesedent og ved $\exists$-suksedent. Her kan en være mer eller mindre lur.
- Som ved uendelige prosesser i informatikk – det er viktig at vi lager utledninger som er fair. Det vil si at alt som kan analyseres vil bli analysert før eller senere hvis da ikke utledningen stopper opp i et bevis.